



## Esquema y recomendaciones para el uso de los Modelos de Ecuaciones Estructurales

### Scheme and recommendations for the use of Structural Equations Models

Joan Guàrdia Olmos  
Universitat de Barcelona

#### Resumen

En los últimos treinta años el uso de los Modelos de Ecuaciones Estructurales (SEM) ha ido incrementándose de una manera exponencial. Tal es este incremento que asistimos, a veces, a una aplicación de la técnica estadística algo alejada de la praxis correcta y adecuada con este tipo de técnicas multivariantes. En este breve trabajo se trata de efectuar una presentación de las distintas fases a seguir en el uso de los SEM, una presentación de las opciones más habituales y de las recomendaciones a considerar en esas mismas fases.

*Palabras clave:* Modelos de Ecuaciones Estructurales, análisis estadístico, análisis multivariado

#### Abstract

In the last thirty years the use of Structural Equation Modeling (SEM) has been increasing in an exponential manner. Such is this increase that we are witnessing, sometimes a use so far from the correct and appropriate practice with this type of multivariate statistical technique. In this short paper we want to make a presentation of the different stages to follow in the use of SEM, and a presentation of the most common options and recommendations to consider in those same phases.

*Keywords:* Structural Equations Modelling, statistical analysis, multivariate analysis

El uso de los Modelos de Ecuaciones Estructurales (SEM) se ha extendido en el ámbito de las Ciencias Sociales de una manera espectacular. Un simple vistazo a las revistas de mayor impacto en este dominio de la ciencia, basta para ver como el nombre de esta técnica estadística se identifica en el propio título del trabajo. Si efectúan una simple búsqueda en Google Académico de los últimos diez años, observarán una cifra espectacular (2020 documentos en los que en el título aparece “A *Structural Equation Model*” el día 4 de agosto de 2016). Vamos, toda una tarea imposible, seguir con exhaustividad en los ámbitos y circunstancias en los que los SEM son no solo en una técnica de análisis estadístico, sino que se convierten en el generador de modelos teóricos. Y eso es así, puesto que

muchos de estos trabajos creen que la aplicación de una técnica estadística como son los modelos SEM implica al mismo tiempo validar un modelo teórico que representa un determinado fenómeno complejo sometido a análisis científico.

En los primeros años de uso de los SEM, tiempos en los que *Lisrel* se convirtió en el programa por excelencia, se llegaron a denominar Modelos Causales otorgándoles la posibilidad de establecer, *per se*, condiciones de causalidad entre variables a partir de las estimaciones de coeficientes de correlación de Pearson o de Spearman, según el caso. Tal era la necesidad, en los años ochenta, de promover relaciones causales en Ciencias Sociales, que la aparición de los SEM se convirtió en un ascensor de rigor científico

llevando las relaciones funcionales propias de la correlación a los niveles de las relaciones causales de las ciencias experimentales.

Como es evidente, muy pronto surgieron las críticas a esas posiciones y duros debates en torno a las reales opciones de los SEM y de delimitar la calidad y cantidad de información que la técnica realmente aporta. Desde aquellos debates a la actualidad las cosas han mejorado y cuando se habla de relaciones causales y SEM se hace desde la perspectiva de modelos experimentales y, por tanto, de una verdadera manipulación de las condiciones de las variables independientes.

Sin embargo, los datos ya hacen pensar que con tantas aplicaciones publicadas, con toda seguridad nos encontramos antes distintos sistemas de aplicación y uso, distintos criterios de interpretación y muy distintas concepciones de lo que realmente implica el uso de los SEM como herramienta analítica y de progreso científico. Este trabajo pretende llamar la atención del lector en algunos elementos muy simples para mejorar las circunstancias en la aplicación de los SEM y de su correcta interpretación. No pretende ser un documento exhaustivo sobre el tema ni una presentación detallada. Solo una serie de reflexiones y conceptos sencillos para guiar a un posible usuario no experto. Además, solo incluiremos un listado de los textos que, en nuestra opinión, pueden ser de consulta casi obligada para hacer una buena aproximación a los SEM y disponer de un bagaje de conocimientos de la técnica que aumente la probabilidad de su buen uso y gestión.

### Fases en la construcción de un SEM

Este apartado es muy simple de plantear puesto que en el caso de los SEM su aplicación requiere el cumplimiento de las fases habituales para cualquier modelo lineal estadístico y, por tanto, el uso de, por ejemplo, modelos de regresión simple o múltiple o de regresiones logísticas, servirán como un buen antecedente en el uso de los SEM. Así pues, una aplicación rigurosa de la técnica pasa por las siguientes fases ordenadas:

1. Especificación del modelo
2. Identificación del modelo
3. Estimación del modelo
4. Verificación y ajuste del modelo
5. Interpretación de resultados

Es importante, especialmente en los usuarios principiantes, seguir este simple esquema. No por novedoso, que no lo es, simplemente para garantizar un esquema riguroso en su aplicación. Con un poco de experiencia, el proceso será más rápido pero no menos riguroso. Estas fases están planteadas de una forma no especialmente estadística, están más pensadas desde una perspectiva más metodológica, en el sentido de asegurar que el modelo resultante de este proceso tenga viabilidad teórica. La experiencia muestra que es muy difícil proponer

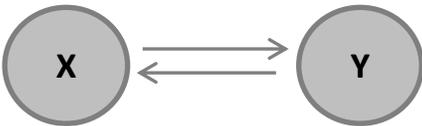
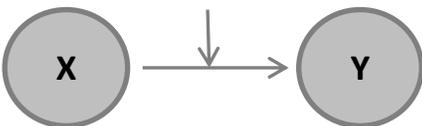
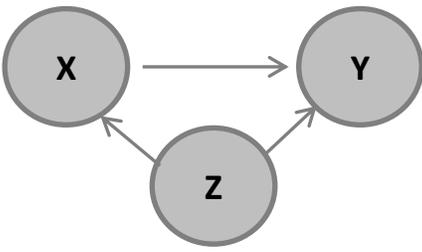
un modelo SEM y que este se ajuste a los datos observados y, aunque resulte sorprendente, lo realmente asombroso es la gran cantidad de modelos que se publican con datos de ajuste muy adecuados. La realidad es distinta y las condiciones de ajuste son muy exigentes, y especificar un modelo de ajuste es una tarea al alcance de muy pocos. Recuerden que, lamentablemente, solo se suelen publicar los resultados que son favorables a los intereses de los autores y editores. No quiero pensar que sucedería si publicáramos los SEM fallidos. Los datos del principio se verían multiplicados por una constante enorme, seguro.

### Especificación de un SEM

Para ello deben recordar que un SEM no es más que la traducción esquemática de las relaciones funcionales y/o estructurales entre variables observables y/o latentes que representan de una forma razonable un fenómeno complejo. No se trata de un modelo teórico *per se* puesto que es un modelo estadístico generalmente de la familia de los modelos lineales. No se trata de un modelo teórico ni teórico en el sentido clásico del término. Si tiene entidad teórica lo será en la medida en que el marco teórico en el que se plantea el SEM tenga la solidez y las condiciones metodológicas necesarias para que el SEM se considere una aportación teórica. La mayoría de los modelos SEM publicados son, realmente, modelos estadísticos más cercanos a la fenomenología y a la construcción técnica que a la construcción de teorías en sentido estricto. Recuerden que los modelos estadísticos resultan útiles para resumir, describir o generar predicciones sobre fenómenos complejos; pero de ninguna manera son pruebas de verdad científica. Y menos aún aquellos contrastes que se basan, como los SEM, en los criterios *fisherianos* de las pruebas de hipótesis clásicas no bayesianas.

Especificar un SEM implica que existe un marco teórico de referencia que permite establecer relaciones entre variables observables (*Path Analysis*) o latentes (SEM) para representar un determinado fenómeno. Esos efectos implican relaciones entre las variables que se proponen y se trata de que puedan ser justificadas a partir de las proposiciones teóricas que se usan como marco de referencia. Así, los SEM (o *Path Analysis* si se trata de variables observables) se deben postular como una herramienta estadística de vocación confirmatoria y no exploratoria. Deben recordar que los efectos entre variables que pueden ser propuestos se pueden modificar y analizar diversas posibilidades, pero la cantidad de combinaciones posibles de los efectos entre variables puede ser casi infinita; de manera que explorar es una opción francamente insensata. Debemos partir de un marco teórico que identifique que relaciones deben postularse entre variables y tales relaciones deben ser traducidas a los efectos que los SEM permiten. Especificar un efecto o no hacerlo debe ser el resultado de un amplio conocimiento del fenómeno a estudio. La siguiente tabla resume los efectos habituales en SEM (Tabla 1).

Tabla 1.  
Efectos habituales especificados en los SEM. X, Y, Z son variables latentes

| Efecto                | Representación gráfica   |
|-----------------------|--|
| Efecto Directo        |    |
| Efecto Indirecto      |    |
| Efecto de correlación |    |
| Efecto recíproco      |    |
| Efecto condicional    |  |
| Efecto espurio        |  |

Pueden darse otros efectos más complejos pero los que aquí hemos descrito son más que suficientes para dar respuesta a la mayor parte de efectos simples y complejos. Deben recordar que la mayoría de los SEM implican diversos efectos de los descritos y, por tanto, dan lugar a modelos muy complejos.

De los modelos habituales es importante recordar que los SEM implican como mínimo algunos elementos fundamentales que pueden ser resumidos diciendo que:

1. Siempre se trata de sistemas multiecuacionales, es decir, existe más de una variable endógena ya sea observable o latente y cada variable requiere de una

ecuación, y

2. En general se tratan de ecuaciones lineales y, por tanto, la linealidad debe ser una representación matemática plausible para el fenómeno que se pretende modelizar.

El modelo habitual que se usa como modelo general es el siguiente:

$$\begin{aligned}\eta &= \beta\eta + \Gamma\zeta + \zeta, \\ x &= A_x\zeta + \delta, \\ y &= A_y\eta + \varepsilon,\end{aligned}$$

donde:

$\eta$  es el vector de variables endógenas latentes,

$\beta$  es la matriz de efectos entre variables latentes,  
 $\Gamma$  es la matriz de efectos entre variable endógenas y exógenas ambas latentes,  
 $\zeta$  es el vector de variables exógenas latentes  
 $\zeta$  es el vector de residuales asociados a cada endógena latente,  
 $x$  es el vector de variables exógenas observables  
 $A_x$  es la matriz de cargas factoriales exógenas  
 $\delta$  es el vector de error de medida asociado a cada exógena observable,  
 $y$  es el vector de variables endógenas observables  
 $A_y$  es la matriz de cargas factoriales endógenas y  
 $\varepsilon$  es el vector de error de medida asociado a cada endógena observable.

A partir de este modelo general se pueden establecer diversas modalidades en función de si solo se especifican variables exógenas (como en el caso de los modelos de Análisis Factorial Confirmatorio) o solo variables endógenas (como en el caso de los modelos de efectos recursivos) o se mezclan ambos tipos de variables como suele ser más habitual. En todo caso, todo SEM debe ser especificado mediante las ecuaciones anteriores y en función de los efectos especificados los elementos y componente de las diversas matrices y vectores adoptan formas diferentes. Desde los efectos (parámetros) denominados como libres y que deben ser estimados a aquellos valores denominados fijos que adoptan un valor concreto, en general 0 como sinónimo de no efecto. Estas son las ocho matrices fundamentales (Tabla 2).

Tabla 2.  
 Matrices fundamentales

| Matriz               | Componentes                                       |
|----------------------|---|
| $\beta$              | Efectos entre endógenas                           |
| $\Gamma$             | Efectos entre exógenas y endógenas                |
| $\phi$               | Correlación entre latentes exógenas               |
| $A_x$                | Cargas factoriales exógenas                       |
| $A_y$                | Cargas factoriales endógenas                      |
| $\theta_\delta$      | Varianzas-Covarianzas entre errores exógenos      |
| $\theta_\varepsilon$ | Varianzas-Covarianzas entre errores endógenos     |
| $\psi$               | Varianzas-Covarianzas entre errores estructurales |

En general, los SEM se han aplicado a diversos modelos y situaciones. En los últimos tiempos, los más habituales son los siguientes:

1. *Path Analysis* o, como ya se ha dicho, modelos con solo variables observables y medidas sin error.
2. Análisis Factorial Confirmatorio, en el que se valoran estructuras factoriales previamente establecidas. Existe una opción más reciente sobre estrategias exploratorias denominada Modelos de Ecuaciones Estructurales Exploratorios (ESEM) solo aplicables al caso de las estructuras factoriales.

3. Modelos de Ecuaciones Estructurales generales en los que existe una estructura entre variables exógenas y endógenas.
4. Modelos de Curva de Crecimiento en los que se usan los SEM para modelizar estructuras longitudinales.
5. Análisis Multigrupo en los que los SEM se usan para contrastar modelos entre grupos para valorar las diferencias entre esos grupos en lo que se refiere al modelo SEM propuesto.

### Identificación de parámetros

No entraremos en los detalles matemáticos de esta fase pero baste decir que como se trata de un sistema de ecuaciones múltiples, la obtención de una solución adecuada pasa por la condición habitual de la existencia de más ecuaciones que parámetros a estimar (incógnitas) y así evitar que el sistema sea indeterminado. Para identificar un modelo deben calcularse los grados de libertad existentes y asociados al modelo que se propone. De este modo, se trata de establecer el número de parámetros a estimar y disponer como mínimo del mismo número de ecuaciones para que el sistema sea solucionable. El número de ecuaciones viene determinado por el número de correlaciones o de covarianzas, según se trate de un caso u otro el dato original (R o S), de las que se disponga entre las variables observadas ( $x$  e  $y$ ). De este modo, el número de grados de libertad ( $gl$ ) de cada modelo se establece mediante la siguiente ecuación:

$$gl = \frac{1}{2} [p(p + 1)] - t,$$

donde  $p$  es el número de variables observadas tanto endógenas como exógenas y  $t$  el número de parámetros a estimar. Si  $gl > 0$  el modelo es identificado y puede ser estimado, si  $gl = 0$  el modelo está exactamente identificado y no pueden proponerse más efectos y, finalmente, si  $gl < 0$  el modelo está no identificado y deben retirarse efectos del modelo por ser imposible su estimación.

### Estimación de parámetros

Son muy diversas las opciones en las técnicas de estimación que pueden ser aplicadas y las combinaciones son múltiples en función del modelo que se proponga, los efectos dispuestos, las métricas de las variables observadas y los tamaños de muestra. Son tantas las opciones que deberíamos dedicar un texto entero a su desarrollo. La Tabla 3 muestra algunas que el usuario puede considerar.

En cada caso el usuario deberá seleccionar la técnica idónea y correcta para cada situación. No es cierto que todos los modelos deban ser tratados mediante ML y que no se puedan establecer SEM con variables observadas categoriales.

Tabla 3.  
*Opciones de técnicas de estimación para SEM*

| Técnica de estimación             | Notación | Observaciones   |
|-----------------------------------|----------|---|
| Máxima Verosimilitud              | ML       | Todas las variables endógenas continuas con distribución multinormal.               |
| Mínimos Cuadrados                 | LS       | Alguna de las variables endógenas dicotómica o categorial.                          |
| Mínimos Cuadrados Ponderados      | WLS      | Alguna de las variables endógenas nominal o resultante del recuento de frecuencias. |
| Mínimos Cuadrados Generalizados   | GLS      | Las mismas condiciones que WLS pero con datos censurados                            |
| Mínimos Cuadrados en dos Etapas   | TLS      | Solución óptima para la reducción del efecto de colinealidad.                       |
| Mínimos Cuadrados no ponderados   | ULS      | Las mismas condiciones que para TLS pero con menor coste computacional.             |
| Estimación por distribución libre | FDE      | Para los casos de incumplimiento flagrante de normalidad                            |
| Wald Test                         | WT       | Análisis de las estimaciones entre grupos. Aplicable para los SEM multigrupo.       |

### Verificación

Para la verificación de un SEM debe atenderse a dos informaciones importantes. Brevemente:

1. El valor de significación de cada parámetro especificado de modo que si se ha especificado un efecto y el parámetro que refleja ese efecto muestra un valor estadísticamente no significativo o con

signo contrario al esperado, debe pensarse que el modelo presenta desajustes evidentes.

2. Valores del ajuste global del modelo que informan de hasta qué punto el modelo es capaz de ajustarse, globalmente, a las distribuciones observadas.

En este segundo punto, existen diversos indicadores creados para tal propósito y algunos de ellos son habituales. La Tabla 4 muestra los más frecuentes:

Tabla 4.  
*Relaciones de Índices de Ajuste habituales para SEM.*

| Índices   | Observaciones   |
|---|---|
| Razón de verosimilitud (LR test)                | Se trata de analizar la semejanza entre la matriz original de correlaciones (R) o covarianzas (S) y la matriz reproducida ( $\Sigma$ ) a partir de los parámetros estimados. En la medida en que ( $R \approx \Sigma$ ) el modelo resulta ajustado. El valor de LR se distribuye según un modelo de probabilidad de $\chi^2$ con los grados de libertad derivados de la fase de identificación. Valores altos de significación asociados al valor de $\chi^2$ indican buen ajuste. Se asume que los modelos ajustados presentan un valor de significación $p > .10$ . |
| Índice de Tucker y Lewis (TLI)                  | Indica la mejora del ajuste del modelo propuesto en relación a un modelo base de contraste. Conocido también como NNFI ( <i>Non Normed Fit Index</i> ).   |
| Índice de Ajuste Comparativo (CFI)              | Igual a TLI pero siempre oscila entre 0 y 1. En ambos casos se asume que un valor a partir de .95 se asocia con buenos modelos.   |
| Raíz Cuadrada del Error (RMSEA)                 | Estima el valor del residual general del modelo y debe situarse no más allá de .05. Existe alguna modificación de este índice para los casos de SEM multigrupo.   |
| Raíz Cuadrada del Residual (RMR)                | Representa la discrepancia media entre R y $\Sigma$ .   |
| Raíz Cuadrada Estandarizada del Residual (SRMR) | Idéntica al anterior pero estandarizando la distribución y, por tanto, facilitando su interpretación.   |
| Criterio de Akaike (AIC)                        | Se usa en aquellos modelos que no están jerarquizados y se trata de obtener el valor más bajo posible. Indica que un modelo es ajustado en relación a su complejidad.   |
| Criterio bayesiano (BIC)                        | Exactamente igual que el anterior, se suelen presentar a la vez para seleccionar modelos.   |

### Interpretación de resultados.

De lo dicho hasta ahora se desprende que la interpretación de un SEM ni es una cuestión simple ni de rápida ejecución. La cuestión de un ajuste no implica más que lo que SEM propone: un sistema de representación de relaciones funcionales y estructurales entre variables derivadas de las correlaciones o de las covarianzas. Recuerden que la existencia de un modelo SEM ajustado no implica que no pueda existir otro modelo alternativo que muestre un ajuste mejor al obtenido de manera que nunca es una prueba irrefutable de bondad teórica.

### Bibliografía general de consulta

- Aguinis, H. (2004). *Regression analysis for categorical moderators*. New York, NY: Guilford Press.
- Bentler, P.M., & Wu, E.J.C. (2002). *EQS 6 for Windows. User's Guide*. Encino, CA: Multivariate Software, Inc.
- Bollen, K.A. & Long, J.S. (1993). *Testing Structural Equation Models*. Newbury Park, CA: Sage.
- Brown, T.A. (2006). *Confirmatory Factor Analysis for Applied Research*. New York. Guilford Press.
- Byrne, B.M. (1994). *Structural equation modeling with EQS and EQS/Windows: Basic concepts, applications, and programming*. Thousand Oaks, CA: Sage.

- Byrne, B.M. (2010). *Structural Equation Modeling with AMOS: Basic Concepts, Applications, and Programming (2nd ed.)*. New York, NY: Routledge.
- Comrey, A.L. (1985). *Manual de análisis factorial*. Madrid: Cátedra. [Original en inglés: *A First Course in Factor Analysis*. New York: Academic Press].
- Congdom, P. (2003). *Applied Bayesian Modelling*. Chichester, UK: Wiley.
- Crawley, M.J. (2007). *The R Book*. Chichester, UK: Wiley.
- Dunn, G., Everitt, B., & Pickles, A. (1993). *Modelling covariances and latent variables using EQS*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.
- Everitt, B., & Hothorn, T. (2011). *An introduction to applied multivariate analysis with R*. New York, NY: Springer.
- Everitt, B.S., & Dunn, G. (2010). *Applied multivariate data analysis (2nd ed.)*. Chichester, UK: Wiley. <http://dx.doi.org/10.1002/9781118887486>
- Field, A. (2013). *Discovering statistics using SPSS (4th ed.)*. London: Sage.
- Gifi, A. (1990). *Nonlinear Multivariate Analysis*. Chichester: Wiley.
- Kline, R.B. (2015). *Principles and Practice of Structural Equation Modeling (4th ed.)*. New York: Guilford.
- Loehlin, J.C. (2004). *Latent variable models: an introduction to factor, path, and structural analysis (4rd ed.)*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Millsap, R.E., & Maydeu-Olivares, A. (2009). *The SAGE Handbook of Quantitative Methods in Psychology*. London: Sage.
- Mulaik, S. (2009). *Foundations of Factor Analysis (2nd ed.)*. Boca Raton, FL: CRC Press.
- Murell, P. (2012). *R Graphics (2nd ed.)*. Boca Raton, FL: CRC Press.
- Muthén, L.K. & Muthén, B.O. (1998-2010). *Mplus User's Guide. Sixth Edition*. Los Angeles, CA: Muthén & Muthén
- Murphy, K.R.; Myors, B., & Wolach, A. (2014). *Statistical Power Analysis (4th ed.)*. New York, NY: Routledge.
- Raykov, T., & Marcoulides, G.A. (2006). *A First Course in Structural Equation Modeling (2nd ed.)*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Todman, J., & Dugard, P. (2007). *Approaching multivariate analysis: An introduction for psychology*. New York: Psychology Press.
- Verzani, J. (2014). *Using R for Introductory Statistics (2nd ed.)*. Boca Raton, FL: CRC Press.

Fecha de recepción: 4 de agosto de 2016.

Fecha de revisión: 28 de agosto de 2016.

Fecha de aceptación: 8 de septiembre de 2016.

Fecha de publicación: 1 de diciembre de 2016.