

Jornadas de Automática

Estimación de horizonte móvil certificada para pilas de combustible PEM

Andreu Cecilia^{a,*}, Ronglyu Sun^a, Ramon Costa-Castelló^a

^aUniversitat Politècnica de Catalunya (UPC), Avinguda Diagonal 647, 08028 Barcelona, España.

^bKunming University of Science and Technology (KUST), Kunming, China.

To cite this article: Cecilia, A., Sun, R., Costa-Castelló, R. 2026. Certified Moving Horizon Estimation for PEM Fuel Cells. Jornadas de Automática, 47. <https://doi.org/10.17979/ja-cea.2026.47.13828>

Resumen

Este trabajo presenta un marco de estimación de horizonte móvil (MHE) certificado para sistemas no lineales sujetos a perturbaciones acotadas, ruido de medida y errores de modelado. El estimador combina una formulación MHE con factor de descuento y conjuntos admisibles explícitos, junto con una ruta de certificación basada en la estabilidad incremental exponencial entrada/salida-estado (i-EIOSS) y condiciones LMI tratables. La factibilidad del problema proporciona directamente las matrices de ponderación (η , $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$) y una tasa de contracción, dando lugar a una cota de error de tipo ISS exponencial. Se introduce además una normalización afín con transformaciones de congruencia que mejora el condicionamiento numérico preservando las constantes certificadas. El método se aplica a la monitorización de una pila de combustible PEM, reconstruyendo la saturación de agua líquida a partir de medidas de temperatura. Simulaciones y experimentos sobre una pila H-100 muestran una reconstrucción precisa y mayor robustez frente a un filtro de Kalman extendido.

Palabras clave: Estimación de horizonte móvil, Estimación de estado no lineal, Sensores virtuales, Certificación basada en LMI, Pilas de combustible PEM

Certified Moving Horizon Estimation for PEM Fuel Cells

Abstract

This paper presents a certified moving horizon estimation (MHE) framework for nonlinear systems affected by bounded disturbances, measurement noise and model mismatch. The estimator combines a discounted MHE formulation with explicit admissible sets and a certification route based on incremental exponential input/output-to-state stability (i-EIOSS) together with tractable LMI conditions. Feasibility of the problem directly provides the weighting matrices (η , $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$) and a contraction rate, yielding an explicit exponential ISS-type error bound. An affine normalization with congruence-based weight transformations is introduced to improve numerical conditioning while preserving the certified constants. The method is applied to the monitoring of a PEM fuel cell, reconstructing the liquid-water saturation from temperature-only measurements. Simulations and experiments on an H-100 stack show accurate state reconstruction and improved robustness relative to an extended Kalman filter.

Keywords: Moving horizon estimation, Nonlinear state estimation, Soft sensing, LMI-based certification, PEM fuel cells

1. Introducción

La estimación en línea del estado de sistemas no lineales es un problema central en la práctica del control, especialmente en tareas de monitorización y de sensado virtual (*soft sensing*) donde variables internas clave no pueden medirse di-

rectamente y el estimador debe mantenerse fiable bajo perturbaciones acotadas, ruido de medida, discrepancias planta-modelo y requisitos de admisibilidad física (Rao et al., 2003).

La estimación de horizonte móvil (MHE) es un marco basado en optimización que, en cada instante de muestreo, estima el estado actual resolviendo un programa no lineal de ho-

*Autor para correspondencia: andreu.cecilia@upc.edu
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

rizante finito sobre una ventana deslizante de medidas e entradas pasadas. Frente a observadores clásicos y filtros estocásticos locales, el MHE permite (i) imponer explícitamente restricciones físicas sobre estados, entradas y perturbaciones, (ii) incorporar perturbaciones acotadas y ruido mediante el diseño del coste y las restricciones, y (iii) explotar información multipaso a lo largo del horizonte (Rao et al., 2003; Schiller et al., 2023). No obstante, su despliegue práctico afronta dos dificultades recurrentes: obtener certificados de estabilidad constructivos para un modelo no lineal concreto, y seleccionar matrices de ponderación bien condicionadas numéricamente sin comprometer las garantías teóricas.

Una noción de detectabilidad clave en el análisis robusto del MHE es la estabilidad incremental entrada/salida-estado (i-IOSS), que relaciona diferencias en las señales de entrada/salida con diferencias en las trayectorias del estado (Müller, 2017; Schiller et al., 2023). Los resultados existentes de MHE robusto y de estimación con información completa establecen estabilidad bajo hipótesis de detectabilidad no lineal y costes de etapa adecuados (Rao et al., 2003; Müller, 2017; Knüfer and Müller, 2023). Trabajos basados en Lyapunov y LMI proporcionan además vías tratables para certificar la detectabilidad incremental y la estabilidad exponencial robusta del MHE (Schiller et al., 2023; Arezki et al., 2023). Sin embargo, para un problema de monitorización no lineal concreto, todavía es necesario conectar el certificado, los pesos del estimador, la región de operación admisible y el escalado numérico empleado por el programa no lineal.

Las pilas de combustible de membrana de intercambio de protones (PEMFC) constituyen un *benchmark* relevante y exigente: variables internas de gestión de agua no son medibles en línea, la dinámica es no lineal y las variables deben satisfacer rangos de admisibilidad física, y el desempeño de la estimación es sensible a la discrepancia planta-modelo (Strahl et al., 2014; Cecilia et al., 2021; Diab et al., 2022). En este trabajo la PEMFC se emplea como instanciación de referencia de la metodología propuesta.

Las contribuciones de este artículo son: (i) una formulación MHE para la reconstrucción conjunta de la temperatura del *stack* y la saturación de agua líquida bajo perturbaciones acotadas y restricciones admisibles; (ii) un procedimiento de certificación tratable que establece una propiedad de estabilidad incremental exponencial entrada/salida-estado (i-EIOSS) mediante una función de Lyapunov cuadrática y condiciones LMI suficientes basadas en cotas politópicas de los jacobianos del modelo, cuya factibilidad devuelve directamente las matrices de ponderación y la tasa de contracción; (iii) una normalización afín con transformaciones de congruencia de los pesos, que preserva el minimizador y las constantes certificadas; y (iv) la validación en simulación y sobre un prototipo experimental H-100, comparando con un filtro de Kalman extendido (EKF).

1.1. Notación

Para una matriz simétrica $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} > 0$ ($\mathbf{A} < 0$) denota definición positiva (negativa). Para $\mathbf{M} > 0$ se define $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{M}}^2 := \mathbf{v}^\top \mathbf{M} \mathbf{v}$. La notación $(\cdot)_{j|t}$ indica una cantidad en el instante j estimada con medidas disponibles hasta t . Se denota $\mathbb{I}_{[a,b]} := \{a, \dots, b\}$ y por $\text{Co}(\cdot)$ la envolvente convexa.

2. Formulación del problema y sistema de referencia

2.1. Modelo de la PEMFC

Las PEMFC generan electricidad mediante reacciones electroquímicas que convierten hidrógeno y oxígeno en trabajo eléctrico, calor y agua. Para la monitorización, el aspecto clave es una adecuada gestión térmica y de agua en el conjunto membrana-electrodo: la membrana debe permanecer suficientemente hidratada, mientras que el exceso de agua líquida puede provocar inundación y reducir la eficiencia (Tawalbeh et al., 2022). Como los estados internos de agua no son medibles en línea, la plataforma constituye un *benchmark* significativo para la estimación de estado no lineal.

Se adopta un modelo orientado al control (Strahl et al., 2014), con estado $\mathbf{x} = [T_{fc}, s]^\top$, donde T_{fc} (K) es la temperatura del *stack* y s (–) la saturación de agua líquida. La entrada es $\mathbf{u} = [I, v_{\text{air}}]^\top$ (corriente de carga y velocidad de aire) y la salida medida es la temperatura. Discretizando por Euler con periodo ΔT e incorporando perturbaciones aditivas acotadas $\mathbf{w}_t = [w_{1,t}, w_{2,t}, w_{3,t}]^\top$, la dinámica del sistema es:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{f}_{\text{PEM}}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_t), \\ y_t &= \mathbf{h}_{\text{PEM}}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_t) = T_{fc,t} + w_{3,t}, \end{aligned} \quad (1)$$

con la actualización de estado

$$\begin{aligned} T_{fc,t+1} &= T_{fc,t} + \Delta T(K_1(E_{oc}n_{\text{cell}} - V_{fc})u_{1,t} \\ &\quad + K_2(T_{\text{amb}} - T_{fc,t})u_{2,t} - K_{11}f_p + w_{1,t}), \end{aligned} \quad (2)$$

$$s_{t+1} = s_t + \Delta T(K_3u_{1,t} - K_4f_p + K_5f_d + w_{2,t}). \quad (3)$$

La primera ecuación es un balance de energía y la segunda un balance neto de agua líquida. Los términos de evaporación y drenaje son

$$\begin{aligned} f_p(T_{fc}, s) &= \frac{s}{T_{fc}}(p^0 e^{-K_6/T_{fc}} - K_7), \\ f_d(s) &= s(-0,96 + 3,32s - 3,78s^2), \end{aligned} \quad (4)$$

y la tensión del *stack* V_{fc} se obtiene de una relación electroquímica algebraica con pérdidas de activación y óhmicas (Strahl et al., 2014). Los estados satisfacen $0 < T_{fc} < \bar{T}$, $0 < s < s_{\text{opt}}$, y las entradas $I > 0$, $v_{\text{air}} > 0$. El objetivo de medida virtual es reconstruir $\hat{\mathbf{x}}_t = [\hat{T}_{fc,t}, \hat{s}_t]^\top$ a partir de la medida de temperatura, siendo $\hat{s}_t$ la principal variable no medida.

3. Marco MHE certificado

3.1. Formulación del estimador

Para mantener la generalidad, se parte del sistema no lineal genérico

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}_g(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_t), \quad \mathbf{y}_t = \mathbf{h}_g(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_t), \quad (5)$$

con $\mathbf{x}_t \in \mathcal{X}$, $\mathbf{u}_t \in \mathcal{U}$, $\mathbf{w}_t \in \mathcal{W}$, $\mathbf{y}_t \in \mathcal{Y}$ conjuntos compactos. En el instante t , con horizonte $N_t = \min\{t, N\}$ y estimación previa $\hat{\mathbf{x}}_{t-N_t}$, se considera el coste con factor de descuento

$$\begin{aligned} J_{\text{MHE}} &= 2\eta^{N_t} \|\hat{\mathbf{x}}_{t-N_t|t} - \hat{\mathbf{x}}_{t-N_t}\|_{\mathbf{P}}^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N_t} \eta^{j-1} (2\|\hat{\mathbf{w}}_{t-j|t}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\hat{\mathbf{y}}_{t-j|t} - \mathbf{y}_{t-j}\|_{\mathbf{R}}^2), \end{aligned} \quad (6)$$

y la estimación se obtiene resolviendo

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{x}}_{t-N|t}, \hat{\mathbf{w}}_{jt}} J_{\text{MHE}} \\ \text{s.a. } \hat{\mathbf{x}}_{j+1|t} &= \mathbf{f}_g(\hat{\mathbf{x}}_{j|t}, \mathbf{u}_j, \hat{\mathbf{w}}_{j|t}), \\ \hat{\mathbf{y}}_{j|t} &= \mathbf{h}_g(\hat{\mathbf{x}}_{j|t}, \mathbf{u}_j, \hat{\mathbf{w}}_{j|t}), \\ \hat{\mathbf{w}}_{j|t} &\in \mathcal{W}, \hat{\mathbf{y}}_{j|t} \in \mathcal{Y}, \hat{\mathbf{x}}_{j|t} \in \mathcal{X}, \mathbf{u}_j \in \mathcal{U}. \end{aligned} \quad (7)$$

El factor $\eta \in (0, 1)$ descuenta exponencialmente la información antigua. Los términos $(\eta, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$ no se tratan como parámetros heurísticos, sino que se calculan a partir de un certificado i-EIOSS. La siguiente sección presenta una metodología para certificar esta propiedad.

3.2. Caracterización i-EIOSS basada en Lyapunov

Se introduce el error incremental $\boldsymbol{\epsilon}_t \triangleq \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t$, donde $\mathbf{x}_t$ y $\hat{\mathbf{x}}_t$ son dos soluciones arbitrarias de (5) con la misma entrada $\mathbf{u}_t$ pero posiblemente distintas condiciones iniciales y perturbaciones.

Definición 1. El sistema (5) es i-EIOSS respecto a $\mathbf{P} > 0$ si existen $\eta \in (0, 1)$ y $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ tales que, para todo $t \in \mathbb{I}_{\geq 0}$ y para cualesquiera dos trayectorias con $\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}}_0 \in \mathcal{X}$, $\mathbf{w}_i, \hat{\mathbf{w}}_i \in \mathcal{W}$,

$$\|\boldsymbol{\epsilon}_t\|_{\mathbf{P}}^2 \leq \kappa_1 \eta^t \|\boldsymbol{\epsilon}_0\|_{\mathbf{P}}^2 + \kappa_2 \sum_{i=0}^{t-1} \eta^{t-1-i} (\|\boldsymbol{\epsilon}_{y,i}\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\boldsymbol{\epsilon}_{w,i}\|_{\mathbf{Q}}^2), \quad (8)$$

con $\mathbf{R} > 0$, $\mathbf{Q} > 0$, $\boldsymbol{\epsilon}_{y,i} = \mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i$ el error de salida e $\boldsymbol{\epsilon}_{w,i} = \mathbf{w}_i - \hat{\mathbf{w}}_i$ el error de perturbación.

La propiedad i-EIOSS formaliza que las diferencias entre dos trayectorias decaen exponencialmente salvo por la contribución acotada de los errores de salida y perturbación acumulados; en particular, si $\boldsymbol{\epsilon}_{y,i} = \boldsymbol{\epsilon}_{w,i} = \mathbf{0}$ para todo i , el error $\boldsymbol{\epsilon}_t$ se anula exponencialmente.

Proposición 1. Sean $(\mathbf{x}_t, \hat{\mathbf{x}}_t)$ dos soluciones de (5) con la misma entrada $\mathbf{u}_t \in \mathcal{U}$ y perturbaciones $\mathbf{w}_t, \hat{\mathbf{w}}_t \in \mathcal{W}$. Si existen $\mathbf{P} > 0$, $\mathbf{R} > 0$, $\mathbf{Q} > 0$ y $\eta \in (0, 1)$ tales que la función de Lyapunov cuadrática $V_t = \|\boldsymbol{\epsilon}_t\|_{\mathbf{P}}^2$ satisface la desigualdad de disipación

$$V_{t+1} - \eta V_t \leq \|\boldsymbol{\epsilon}_{y,t}\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\boldsymbol{\epsilon}_{w,t}\|_{\mathbf{Q}}^2 \quad (9)$$

para todo $t \in \mathbb{I}_{\geq 0}$, entonces (8) se cumple con $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$.

La demostración sigue aplicando (9) recursivamente t veces desde el instante inicial. Para hacer (9) comprobable de forma tratable, se impone la siguiente hipótesis sobre la regularidad del modelo.

Suposición 1. Las funciones $\mathbf{f}_g$ y $\mathbf{h}_g$ son diferenciables en $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{W}$ y sus jacobianos respecto al estado y a la perturbación son uniformemente acotados. En consecuencia, pertenecen a envolventes convexas politópicas descritas por conjuntos finitos de matrices vértice:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^x(\cdot) \in \mathcal{P}_x &= \text{Co}\{\mathbf{F}_1^x, \dots, \mathbf{F}_{n_x}^x\}, \\ \mathbf{F}^w(\cdot) \in \mathcal{P}_w &= \text{Co}\{\mathbf{F}_1^w, \dots, \mathbf{F}_{n_w}^w\}, \\ \mathbf{H}^x(\cdot) \in \mathcal{Q}_x &= \text{Co}\{\mathbf{H}_1^x, \dots, \mathbf{H}_{q_x}^x\}, \\ \mathbf{H}^w(\cdot) \in \mathcal{Q}_w &= \text{Co}\{\mathbf{H}_1^w, \dots, \mathbf{H}_{q_w}^w\}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{F}_j^x = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}_g$, $\mathbf{F}_m^w = \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}_g$, $\mathbf{H}_k^x = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}_g$ y $\mathbf{H}_p^w = \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{h}_g$ son las matrices jacobianas locales evaluadas en puntos intermedios del segmento que une $(\mathbf{x}_t, \mathbf{w}_t)$ y $(\hat{\mathbf{x}}_t, \hat{\mathbf{w}}_t)$ (según el teorema del valor medio diferencial).

Bajo la Suposición 1, la desigualdad de disipación (9) puede verificarse en los vértices de los politopos, lo que conduce a la siguiente condición LMI suficiente para i-EIOSS.

Teorema 1. Bajo la Suposición 1, si existen $\mathbf{P} > 0$, $\mathbf{R} > 0$, $\mathbf{Q} > 0$ y $\eta \in (0, 1)$ tales que, para todos los índices de vértice $j \in \{1, \dots, n_x\}$, $m \in \{1, \dots, n_w\}$, $k \in \{1, \dots, q_x\}$, $p \in \{1, \dots, q_w\}$,

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (10)$$

con

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \mathbf{F}_j^{x^T} \mathbf{P} \mathbf{F}_j^x - \eta \mathbf{P} - \mathbf{H}_k^{x^T} \mathbf{R} \mathbf{H}_k^x, \\ \Psi_{12} &= \mathbf{F}_j^{x^T} \mathbf{P} \mathbf{F}_m^w - \mathbf{H}_k^{x^T} \mathbf{R} \mathbf{H}_p^w, \\ \Psi_{22} &= \mathbf{F}_m^{w^T} \mathbf{P} \mathbf{F}_m^w - \mathbf{H}_p^{w^T} \mathbf{R} \mathbf{H}_p^w - \mathbf{Q}, \end{aligned}$$

entonces el sistema (5) satisface (8) con $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$.

La factibilidad de (10) se verifica para cada combinación de vértices; por convexidad, la desigualdad se extiende a todo el politopo. El Teorema 1 se emplea aquí de forma constructiva: su factibilidad proporciona directamente la tupla $(\eta, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$ que se incorpora al coste (6), en lugar de limitarse a verificar *a posteriori* un estimador ya sintonizado.

3.3. Análisis del error del MHE

Teorema 2. Considérese el MHE (7) bajo las hipótesis de la Proposición 1. Si el horizonte N satisface

$$4\eta^N < 1, \quad (11)$$

entonces, para todo t , el error de estimación cumple

$$\|\boldsymbol{\epsilon}_t\|_{\mathbf{P}}^2 \leq 4\gamma^t \|\boldsymbol{\epsilon}_0\|_{\mathbf{P}}^2 + \frac{4}{1-\gamma} \max_{0 \leq \tau \leq t-1} \gamma^{t-1-\tau} \|\mathbf{w}_\tau\|_{\mathbf{Q}}^2, \quad (12)$$

con tasa de contracción $\gamma = (4\eta^N)^{1/N} < 1$.

La cota (12) establece un olvido exponencial del error inicial y un efecto residual acotado inducido por la secuencia de perturbaciones; en el caso sin perturbaciones se reduce a convergencia exponencial. El mismo η se utiliza en el coste (6), en la desigualdad de Lyapunov y en la LMI (10), lo que es necesario para que la ponderación del MHE coincida con el decaimiento certificado.

3.4. Normalización de datos

Para mejorar el condicionamiento de (7) se considera una normalización afín de estados, salidas y perturbaciones, junto con transformaciones de congruencia de los pesos. Un caso útil es el escalado máx-mín, $x_{\text{norm}} = (x - x_{\text{mín}})/(x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}})$. Con matrices no singulares $\mathbf{U}_x, \mathbf{U}_y, \mathbf{U}_w$ y vectores de desplazamiento $\mathbf{c}_x, \mathbf{c}_y, \mathbf{c}_w$, los pesos transformados son

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{U}_x^{-T} \mathbf{P} \mathbf{U}_x^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{U}_y^{-T} \mathbf{R} \mathbf{U}_y^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{U}_w^{-T} \mathbf{Q} \mathbf{U}_w^{-1}. \quad (13)$$

Teorema 3. Bajo las hipótesis de la Proposición 1, el problema MHE normalizado con los pesos (13) es equivalente en optimización al original (mismos minimizadores) y el error satisface (12) con las mismas constantes γ y N .

Así, el escalado máx-mín puede emplearse para acondicionar el programa no lineal sin alterar el optimizador ni las constantes certificadas.

3.5. Aplicación en la PEMFC

Para la PEMFC se tiene $n = 2$, $p = 1$, $q = 3$, con $\mathbf{f}_g = \mathbf{f}_{\text{PEM}}$ y $\mathbf{h}_g = \mathbf{h}_{\text{PEM}}$. El jacobiano de estado $\mathbf{F}^x \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ se muestrea sobre la rejilla de certificación y se reduce a los puntos extremos de la envolvente convexa muestreada; las matrices $\mathbf{F}^w$, $\mathbf{H}^x$ y $\mathbf{H}^w$ son constantes y aportan un vértice cada una. Sobre una rejilla 20×200 en $T_{fc} \in [290, 360]$ K y $s \in [10^{-5}, 0,198]$ (4000 muestras) se obtienen 142 vértices no repetidos del jacobiano de estado. La pertenencia de los jacobianos evaluados a la envolvente convexa de los vértices se verifica mediante una comprobación baricéntrica.

Las restricciones admisibles (7) se especializan con la salida reducida al canal de temperatura. Los rangos físicos y de perturbación empleados en la normalización máx-mín se resumen en la Tabla 1. El problema no lineal se resuelve con CasADi 3.7.2 e IPOPT 3.14.19 en MATLAB R2024b; las LMI se verifican con YALMIP y MOSEK.

Tabla 1: Rangos de estado, salida y perturbación usados en la normalización.

Variable	Rango	Unidad
T_{fc}	$[290, 360]$	K
s	$[10^{-5}, 0,198]$	—
w_1	$[-10^{-3}, 10^{-3}]$	K s^{-1}
w_2	$[-10^{-5}, 10^{-5}]$	s^{-1}
w_3	$[-2 \times 10^{-2}, 2 \times 10^{-2}]$	K

4. Estudio de simulación

Las simulaciones evalúan el seguimiento nominal, la robustez ante medidas intermitentes y ruidosas y perturbaciones de proceso acotadas, y la comparación con un EKF bajo el mismo modelo y las mismas restricciones de sensado. El periodo de muestreo es $\Delta T = 2$ s y el horizonte $N_t = 20$. Los pesos del problema *normalizado* seleccionados, que satisfacen los Teoremas 1 y 2, son

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 3,0139 & 0,0069 \\ 0,0069 & 2,9877 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 5,6445 & 0 & 0,0018 \\ 0 & 2,8043 & 0 \\ 0,0018 & 0 & 2,6012 \end{bmatrix},$$

$\tilde{R} = 12,2239$, $\eta = 0,9$. Con $N_t = 20$ y $\eta = 0,9$ se cumple (11), pues $4\eta^{N_t} = 0,4863 < 1$, y la tasa de contracción es $\gamma = 0,9646$.

Se consideran dos escenarios: uno sin perturbaciones y otro con perturbaciones de proceso, medidas intermitentes y pérdidas de paquetes. En el segundo, w_1 y w_2 contienen componentes gaussianas de fondo (desviaciones normalizadas 0,004 y 0,008) y w_2 incluye impulsos dispersos; la medida de temperatura se dispone cada 8 muestras, con ruido $\sigma_{\text{meas}} = 0,10$ K y caídas con probabilidad 0,10. Las muestras perdidas se gestionan reteniendo el último valor válido, de modo que el residuo se evalúa en cada instante como una discrepancia de salida acotada.

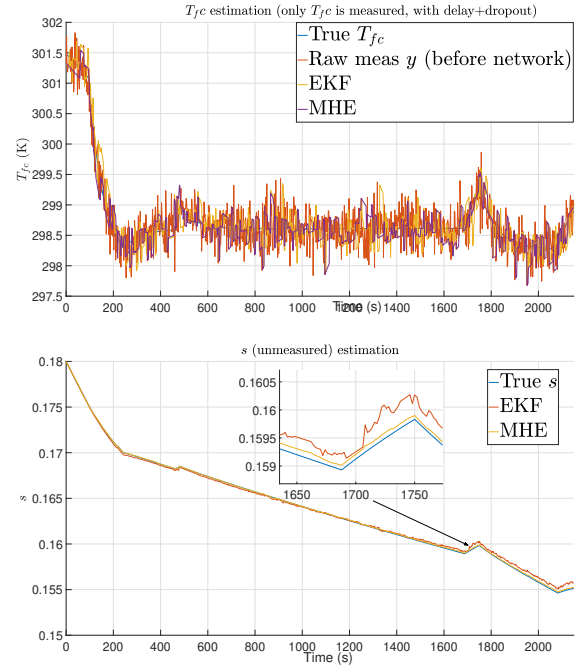


Figura 1: Evolución temporal de la temperatura T_{fc} y de la saturación s con sus estimaciones MHE y EKF bajo medidas intermitentes ruidosas con pérdidas de paquetes y perturbaciones de proceso. La medida cruda y se muestra como referencia; solo se mide T_{fc} .

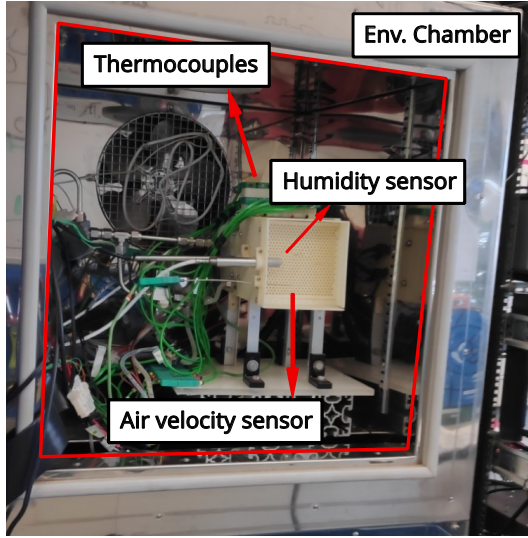
En el caso sin perturbaciones el MHE logra una estimación prácticamente perfecta de ambos estados, coherente con (12). La Figura 1 muestra el caso con perturbaciones. Aunque solo se mide T_{fc} y las muestras están corrompidas, la estimación $\hat{T}_{fc}$ permanece alineada con la trayectoria real con menor fluctuación que la medida cruda. Para el estado no medido s , el MHE sigue de cerca la evolución real. Cuantitativamente, el RMSE de T_{fc} pasa de 0,238 K (EKF) a 0,224 K (MHE), y el de s de $2,5 \times 10^{-4}$ a $6,0 \times 10^{-5}$; sobre el rango $s \in [10^{-5}, 0,198]$ estos corresponden a RMSE relativos de 0,126 % y 0,030 %, una reducción relativa de aproximadamente el 76 % para la variable latente de saturación.

5. Validación experimental

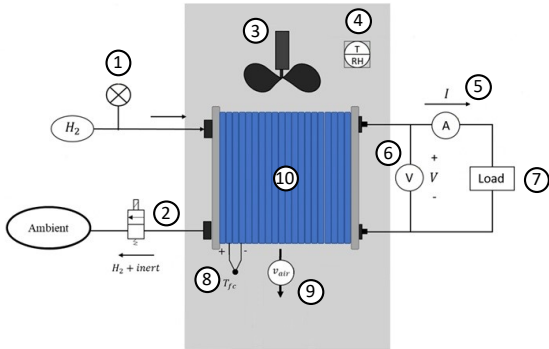
El esquema se valida sobre una pila PEMFC H-100 de cátodo abierto. La velocidad de aire v_{air} se controla mediante un ventilador (anemómetro EE75, E+E Elektronik) y el hidrógeno se suministra en modo de extremo cerrado con purgas periódicas de 500 ms que inducen caídas transitorias de tensión. La temperatura de cada celda se mide con termopares de tipo K y T_{fc} se calcula como su media; la tensión V_{fc} se mide con un amplificador de aislamiento (AD215) y la corriente con un transductor de efecto Hall (LTS 6 NP). Ver Figura 2.

Como el prototipo difiere del modelo de la literatura, se realiza una calibración física por etapas (modelo nominal con $\mathbf{w} = \mathbf{0}$) que proporciona un único modelo nominal compartido por ambos estimadores; los parámetros no se reajustan en línea. La etapa A ajusta el submodelo térmico/de agua (ajuste del 98,43 % en T_{fc}) y la etapa B la relación algebraica estática de tensión (79,83 % en V_{fc}).

Ambos estimadores se inicializan desde el mismo estado previo, con saturación inicial $\hat{s}(0) = 0,1$. Se usan los pesos normalizados del caso de simulación perturbada, con horizonte $N_t = 40$ ($\eta = 0,9$), que también satisface (11) ($4\eta^{40} = 0,0591 < 1$, $\gamma = 0,9317$). Las covarianzas del EKF se derivan de los mismos rangos físicos y escalas de perturbación normalizadas para una comparación justa. Como s no es medible, se emplea un *proxy* de saturación reconstruido a partir de V_{fc} solo como referencia cualitativa, así como una comprobación de consistencia de la tensión reconstruida a partir de los estados estimados.



(a) Plataforma experimental.



(b) Esquema de instrumentación del sistema PEMFC.

Figura 2: Plataforma de validación experimental de la PEMFC. (a) Fotografía del sistema experimental. (b) Diagrama esquemático de la instrumentación: (1) entrada de hidrógeno; (2) salida de hidrógeno; (3) ventilador de aire; (4) sensor de temperatura y humedad relativa ambiental; (5) sensor de corriente; (6) sensor de tensión; (7) carga externa; (8) termopar; (9) sensor de velocidad del aire; (10) *stack*.

La Figura 3 resume los resultados. Ambos estimadores siguen con precisión la temperatura medida, siendo el MHE ligeramente más próximo durante los transitorios pronunciados. La diferencia es mucho más clara en la saturación: el MHE converge rápidamente desde el *prior* inicial inexacto hacia una trayectoria suave próxima a la tendencia indicada por el *proxy*, mientras que el EKF presenta una desviación inicial mayor y un sesgo persistente. La consistencia se confirma con la tensión reconstruida, que para el MHE permanece próxima a la

medida. La Tabla 2 resume los indicadores cuantitativos: el MHE reduce el RMSE de la tensión reconstruida de 0,5405 V a 0,0872 V (83,9 %) y el RMSE local de T_{fc} en 1000–1200 s de 0,0202 K a 0,0075 K.

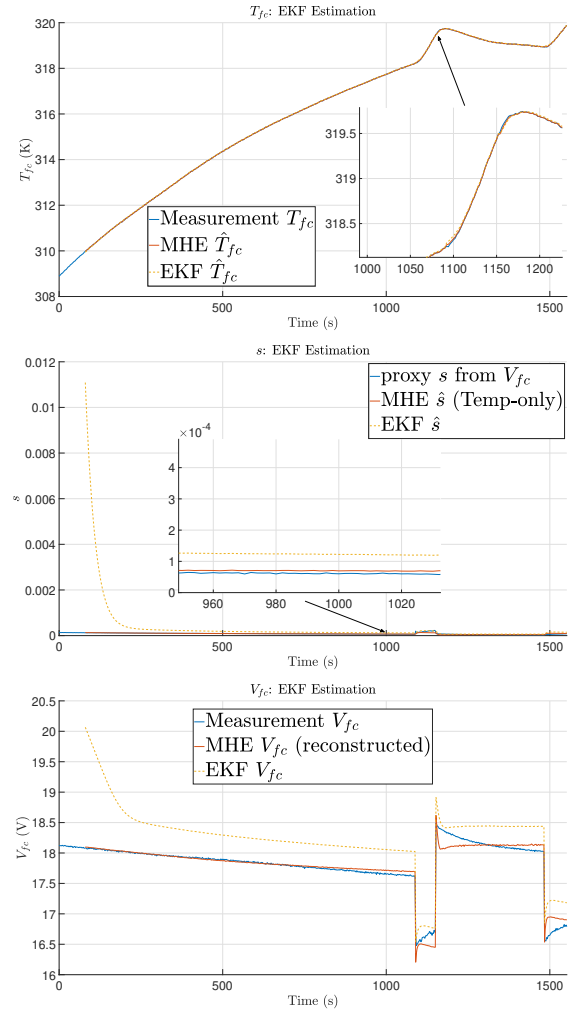


Figura 3: Evolución temporal de T_{fc} , de la saturación s (con el *proxy* indirecto reconstruido a partir de V_{fc}) y de la tensión V_{fc} con datos experimentales. Medidas en azul; estimaciones del MHE (rojo) y del EKF (naranja, discontinuo).

Tabla 2: Resumen cuantitativo de las comparaciones en simulación y experimento.

Métrica	EKF	MHE	Reduc.
Sim.: RMSE T_{fc} (K)	0,238	0,224	5,9 %
Sim.: RMSE s	$2,5 \times 10^{-4}$	$6,0 \times 10^{-5}$	76,0 %
Sim.: RMSE rel. s	0,126 %	0,030 %	76,0 %
Exp.: RMSE tensión (V)	0,5405	0,0872	83,9 %
Exp.: RMSE T_{fc} local (K)	0,0202	0,0075	62,9 %

La diferencia de desempeño se debe principalmente al gran error inicial en s , a la corrección solo con temperatura y a la débil sensibilidad instantánea de T_{fc} frente a s . El EKF actualiza s mediante una linealización local y una propagación de covarianza de un paso, que puede ser demasiado débil para eliminar rápidamente el sesgo inicial. El MHE, en cambio, reestima una trayectoria finita con el modelo no lineal y una ventana de medidas pasadas, reduciendo la sensibilidad al

prior y forzando la consistencia dinámica.

6. Conclusiones

Se ha desarrollado un marco de estimación de horizonte móvil certificado para sistemas no lineales y se ha instanciado en la monitorización de una PEMFC con medidas únicamente de temperatura. Una formulación MHE con factor de descuento y conjuntos admisibles explícitos se combina con un certificado i-EIOSS y condiciones LMI tratables cuya factibilidad devuelve la tupla $(\eta, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$ y una tasa de contracción, dando lugar a una cota de error de tipo ISS exponencial. Una normalización afin con pesos transformados por congruencia mejora el condicionamiento del programa no lineal sin alterar el optimizador ni las constantes certificadas. En simulación, bajo medidas intermitentes ruidosas y perturbaciones, el MHE reduce el RMSE de s del 0,126 % al 0,030 % frente al EKF; experimentalmente, proporciona una reconstrucción notablemente más consistente del estado de agua no medido y de la tensión bajo error de inicialización y discrepancia planta-modelo. El trabajo futuro abordará modelos de gestión de agua más ricos, la fusión multisensor y el tratamiento explícito de retardos en la medida.

Agradecimientos

R. Sun cuenta con el apoyo de la beca de doctorado del China Scholarship Council (No. 202408530116). Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el proyecto DECODER (PID2024-158394OB-C22, MICIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER UE), el

proyecto AVANTE (PDC2025-165204-C22, MICIU/AEI/10.13039/501100011033) y la “Siemens Energy AI Chair” (TSI-100930-2023-5), cofinanciada por la Unión Europea–NextGenerationEU.

Referencias

- Arezki, H., Zemouche, A., Alessandri, A., Bagnnerini, P., 2023. Lmi design procedure for incremental input/output-to-state stability in nonlinear systems. *IEEE Control Systems Letters* 7, 3403–3408.
- Cecilia, A., Serra, M., Costa-Castelló, R., 2021. Nonlinear adaptive observation of the liquid water saturation in polymer electrolyte membrane fuel cells. *Journal of Power Sources* 492, 229641.
- Diab, Y., Auger, F., Schaeffer, E., Chevalier, S., Allahham, A., 2022. Real-time estimation of pemfc parameters using a continuous-discrete extended kalman filter derived from a pseudo two-dimensional model. *Energies* 15 (7).
URL: <https://www.mdpi.com/1996-1073/15/7/2337>
DOI: 10.3390/en15072337
- Knüfer, S., Müller, M. A., 2023. Nonlinear full information and moving horizon estimation: Robust global asymptotic stability. *Automatica* 150, 110603.
- Müller, M. A., 2017. Nonlinear moving horizon estimation in the presence of bounded disturbances. *Automatica* 79, 306–314.
- Rao, C. V., Rawlings, J. B., Mayne, D. Q., 2003. Constrained state estimation for nonlinear discrete-time systems: Stability and moving horizon approximations. *IEEE Transactions on Automatic Control* 48 (2), 246–258.
- Schiller, J. D., Muntwiler, S., Köhler, J., Zeilinger, M. N., Müller, M. A., 2023. A lyapunov function for robust stability of moving horizon estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control* 68 (12), 7466–7481.
- Strahl, S., Husar, A., Puleston, P., Riera, J., 2014. Performance improvement by temperature control of an open-cathode pem fuel cell system. *Fuel Cells* 14 (3), 466–478.
- Tawalbeh, M., Alarab, S., Al-Othman, A., Javed, R. M. N., 2022. The operating parameters, structural composition, and fuel sustainability aspects of pem fuel cells: a mini review. *Fuels* 3 (3), 449–474.