

Jornadas de Automática

Estimación de parámetros en distribuciones de dirección del viento

Martínez-Gutiérrez, S.^{a,*}, Sarabia, D.^a, Merino, A.^a

^a Departamento de Digitalización, Área de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Burgos, Escuela Politécnica Superior, Avda. Cantabria, s/n, 09006 (Burgos).

To cite this article: Martínez-Gutiérrez, S., Sarabia, D., Merino, A. 2024. Parameter estimation in wind direction distributions. *Jornadas de Automática*, 45. <https://doi.org/10.17979/ja-cea.2024.45.10821>

Resumen

Una característica fundamental para definir y evaluar el recurso eólico de lugares candidatos a albergar parques eólicos es la distribución de la dirección del viento. Uno de los métodos más utilizados para modelizar la distribución de la dirección del viento consiste en utilizar una mezcla finita de distribuciones de von Mises (mvM), cuyos parámetros suelen obtenerse mediante el método de los mínimos cuadrados. Tradicionalmente, este método ajusta la función de distribución acumulada (cdf), sin embargo, en este artículo se propone ajustar la función de densidad de probabilidad (pdf) por tener ventajas computacionales. Para comparar ambos métodos se evalúa el coeficiente de determinación (R^2) tanto en la pdf (R^2_{pdf}) como en la cdf (R^2_{cdf}), utilizando los parámetros de cada enfoque. En general, el ajuste de los parámetros mediante el método de los mínimos cuadrados en la pdf resulta más rápido y produce un mejor R^2_{pdf} , sin afectar significativamente al R^2_{cdf} .

Palabras clave: Optimización paramétrica, Identificación estocástica de sistemas, Modelización y simulación de sistemas eléctricos, Sistema de energía renovable, Operación y control óptimos de sistemas de energía.

Parameter estimation in wind direction distributions

Abstract

One of the fundamental characteristics to be studied when characterising the wind resource of a wind farm candidate site is the distribution of the wind direction. One of the most commonly used methods to model the distribution of the wind direction is to use a finite mixture of von Mises distributions (mvM), whose parameters are usually obtained using the method of least squares. Traditionally, this method fits the cumulative distribution function (cdf), however, in this paper we propose to fit the probability density function (pdf) as it has computational advantages. To compare both methods, the coefficient of determination (R^2) is evaluated on both the pdf (R^2_{pdf}) and the cdf (R^2_{cdf}) using parameters from each approach. Generally, adjusting parameters via the least squares method on the pdf proves quicker and yields better R^2_{pdf} without significantly impacting in R^2_{cdf} .

Keywords: Parametric optimization, Stochastic system identification, Modeling and simulation of power systems, Renewable Energy System, Optimal operation and control of power systems.

1. Introducción

Estudiar el comportamiento estadístico del viento es un requisito fundamental a la hora de evaluar la ubicación de un futuro parque eólico (J. Wang et al., 2016). Originalmente, este estudio estadístico del comportamiento del viento se centraba únicamente en modelar la distribución de probabilidad de la velocidad de viento, para la cual se han

propuesto multitud de modelos (Carta et al., 2009). Sin embargo, otro aspecto importante en la evaluación de la energía eólica es el análisis de la distribución de la dirección del viento. Al incorporar la dirección del viento en el análisis estadístico, se puede describir la variación de la dirección de captación de una turbina eólica, lo que permite seleccionar las localizaciones de las turbinas que maximizan el aprovechamiento del recurso eólico y, una vez que el parque

está en operación, gestionarlo en tiempo real de manera más eficiente, reduciendo los costes de operación (Erdem & Shi, 2011). Es habitual modelar la distribución de probabilidad del viento como una mezcla finita de distribuciones de von Mises (mvM); (Carta et al., 2008; Masseran et al., 2013; H. Wang et al., 2023; Yang et al., 2022). En concreto, es en (Carta et al., 2008) donde se propone y demuestra que utilizar una mezcla de varias distribuciones de von Mises (mvM) para obtener el comportamiento estadístico de la dirección del viento ofrece un resultado muy satisfactorio. Sin embargo, la forma en la que se obtiene el valor de los parámetros de la mezcla de distribuciones de von Mises, utilizando el método de los mínimos cuadrados sobre la distribución de probabilidad acumulada (cdf) de la mvM, puede resultar computacionalmente costoso, ya que no existe una expresión analítica para dicha distribución. Por este motivo, en el presente artículo se propone obtener los parámetros de la mvM utilizando el método de los mínimos cuadrados sobre la función de densidad de probabilidad (pdf) en vez de sobre la cdf. Los resultados de ambas propuestas se compararán en términos de tiempos de resolución y en bondad del ajuste, evaluado con el coeficiente R^2 . El artículo se estructura de la siguiente manera; en el apartado 2 se presenta la formulación de la mezcla finita de distribuciones de von Mises, en el apartado 3 se muestra la formulación de las dos alternativas propuestas para obtener los parámetros de las distribuciones, en el apartado 4 se mostrarán algunos resultados numéricos, para finalmente terminar con unas breves conclusiones en el apartado 5.

2. Mezcla finita de distribuciones de von Mises (mvM)

Según esta formulación, la función de densidad de probabilidad de la dirección del viento, $f_{\theta}(\theta)$, se puede calcular según la ecuación (1).

$$f_{\theta}(\theta) = \sum_{j=1}^N \omega_j \cdot \frac{e^{k_j \cdot \cos(\theta - \mu_j)}}{2\pi \cdot I_0(k_j)} \quad (1)$$

Donde N es el número de componentes de la mezcla, μ_j es la dirección media, k_j es el parámetro de concentración, ω_j es el peso de la componente j en la mezcla y $I_0(k_j)$ es la función de Bessel modificada de primer tipo y orden cero, y que se define según la ecuación (2).

$$\begin{aligned} I_0(k_j) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{k_j \cdot \cos(\theta)} d\theta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \cdot \left(\frac{k_j}{2}\right)^{2k} \end{aligned} \quad (2)$$

Integrando sobre la ecuación (1) se obtiene la función de distribución de probabilidad acumulada de la dirección del viento $F_{\theta}(\theta)$, según la ecuación (3).

$$F_{\theta}(\theta) = \sum_{j=1}^N \omega_j \cdot \frac{\int_0^{\theta} e^{k \cdot \cos(\theta - \mu_j)} d\theta}{2\pi \cdot I_0(k_j)} \quad (3)$$

3. Obtención de parámetros

Como ya se ha comentado anteriormente, originalmente se proponía obtener los parámetros de la mvM utilizando el método de los mínimos cuadrados sobre la cdf de la distribución. La formulación de este problema es la que se muestra en (P.1).

$$\min_{\{\mu_j, k_j, \omega_j\}} \sum_{k=1}^T \{\theta CDF_k - F_{\theta}(\theta_k)\}^2 \quad (P.1)$$

s.a.:

$$k_j \geq 0, 0 \leq \mu_j \leq 2\pi, 0 \leq \omega_j \leq 1 \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^N \omega_j = 1 \quad (5)$$

Donde T es el número de intervalos en los que se han dividido las muestras de datos de la dirección del viento, N es el número de distribuciones de von Mises utilizadas en la mezcla ($T \geq N$), θCDF_k es el valor de la distribución acumulada para el intervalo k obtenido a partir de los datos y $F_{\theta}(\theta_k)$ es el valor de la expresión analítica de la distribución acumulada para el valor del intervalo k .

La obtención de la distribución acumulada a partir de los datos θCDF_k , se obtiene dividiendo cada conjunto de datos en un número de intervalos determinado T . Para cada intervalo se calcula su frecuencia relativa y se le suma las frecuencias relativas de los intervalos previos. Se considera que el valor de frecuencia acumulada, de cada intervalo se corresponde con el borde superior de cada intervalo.

Por el contrario, en este artículo se propone obtener los parámetros a partir de la pdf de la distribución según (P.2)

$$\min_{\{\mu_j, k_j, \omega_j\}} \sum_{k=1}^T \{\theta PDF_k - f_{\theta}(\theta_k)\}^2 \quad (P.2)$$

s.a.:

Ecuaciones (4) y (5)

Donde θPDF_k es el valor de la distribución de densidad para el intervalo k obtenido a partir de los datos y $f_{\theta}(\theta_k)$ es el valor de la expresión analítica de la distribución de densidad para el intervalo k .

La obtención de la distribución de densidad de los datos θPDF_k , se obtiene dividiendo cada conjunto de datos en un número de intervalos determinado T . Para cada intervalo se calcula su frecuencia relativa y se le divide por la amplitud del intervalo. Se considera que el valor de densidad de probabilidad de cada intervalo se corresponde con el borde superior de cada intervalo.

Una buena práctica a la hora de resolver problemas de programación no lineal es proporcionar al algoritmo de búsqueda un punto inicial adecuado, el cual va a ser igual para ambos problemas. Para obtener los valores iniciales de cada componente de la mvM, primero hay que dividir y agrupar el conjunto de datos de muestra, ángulos θ_i en N sectores de tamaño n_j , después, mediante las ecuaciones (6), (7), (8), (9) y (10) (Carta et al., 2008), se calcula el valor inicial de los parámetros μ_j , ω_j y k_j .

$$\omega_j = \frac{1}{N} \quad (6)$$

$$\mu_j = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\bar{s}_j}{\bar{c}_j}\right) & ; \bar{s}_j \geq 0, \bar{c}_j > 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; \bar{s}_j > 0, \bar{c}_j = 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\bar{s}_j}{\bar{c}_j}\right) & ; \bar{c}_j < 0 \\ \pi & ; \bar{s}_j = 0, \bar{c}_j = -1 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{\bar{s}_j}{\bar{c}_j}\right) & ; \bar{s}_j < 0, \bar{c}_j > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & ; \bar{s}_j = 0, \bar{c}_j = -1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\bar{s}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \sin \theta_i}{n_j} \quad (8)$$

$$\bar{c}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \cos \theta_i}{n_j} \quad (9)$$

$$A(k_j) = \frac{I_1(k_j)}{I_0(k_j)} = (\bar{s}_j + \bar{c}_j)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

Donde n_j es el número de datos de direcciones de viento pertenecientes al sector j e $I_1(k_j)$ es la función de Bessel modificada de primer tipo y orden uno. Dado que la ecuación (10) es implícita en k_j , supone que debería usarse algún método numérico de resolución, con el consiguiente coste computacional. Ya que únicamente se está buscando un valor inicial para k_j , puede alternativamente utilizarse una ecuación aproximada, propuesta en (Carta et al., 2008), y que se muestra en (11).

$$k_j = \{23.29041409 - 16.8617370(\bar{s}_j^2 + \bar{c}_j^2)^{0.25} - 17.4749884 \cdot e^{-(\bar{s}_j^2 + \bar{c}_j^2)}\}^{-1} \quad (11)$$

4. Resultados

Las dos propuestas para obtener los parámetros de la mezcla finita de distribuciones de von Mises se van a probar y estudiar con datos de viento simulados procedentes del New European Atlas (Dörenkämper et al., 2020; Hahmann et al., 2020). En la página web del NEWA (*New European Wind Atlas*, 2019) es posible acceder de manera gratuita a la serie temporal de velocidad y dirección del viento en una ubicación concreta y a diferentes alturas desde el año 2005 al año 2018 en intervalos de tiempo de media hora, 245424 datos en total, de los cuales faltan 195.

Los datos utilizados en este artículo se corresponden con la ubicación del parque eólico Páramo de Vega situado en la provincia de Burgos (Latitud 42° 30' 59.6", Longitud -3° 47' 14.2") desde 2005 a 2018 a una altura de 75 m, que es la altura disponible más próxima a la góndola de los aerogeneradores de ese parque, que se sitúa a 78 m. (SUMARIO DEL BOLETÍN 33/2008/BOCYL, 2008)

La resolución e implementación de los problemas P.1 y P.2 se ha llevado a cabo con el módulo *fmincon* perteneciente

a la Optimization Toolbox (The MathWorks Inc., 2024b) de Matlab™ (The MathWorks Inc., 2024a), utilizando como algoritmo de optimización el Sequential Quadratic Program (SQP).

El estudio de los resultados se organiza de la siguiente manera: en el subapartado 4.1 se estudia el grado de ajuste tanto en la pdf (R^2_{pdf}) como en la cdf (R^2_{cdf}) utilizando los parámetros obtenidos con P.1 y P.2 y en el subapartado 4.2 se estudia la diferencia en los tiempos de resolución de P.1 y P.2

4.1. Evaluación del grado de ajuste R^2

En (Carta et al., 2008) se muestra cómo el número de distribuciones de von Mises (N) afecta a la bondad del ajuste de los datos, obteniéndose que a partir de $N = 6$ no hay cambios relevantes en la bondad del ajuste si este se evalúa con R^2 .

En este artículo se replica esta comparativa para distintos valores de N (2, 3, 4, 5 y 6) tanto para P.1 como para P.2. En cuanto al valor del número de intervalos en los que se dividen las muestras de datos de la dirección del viento (T), debe escogerse un número lo suficientemente grande, en este artículo se ha decidido probar a dividir los datos de 10 en 10 grados ($T = 36$) y a dividir los datos de grado en grado ($T = 360$).

La bondad del ajuste que se consigue entre los datos y la mezcla finita de distribuciones de von Mises, cuyos parámetros se calculan mediante la aplicación del método de los mínimos cuadrados a la función de probabilidad acumulada (P.1) o mediante la aplicación del método de los mínimos cuadrados a la función de densidad de probabilidad (P.2) se evalúa con R^2_{cdf} y R^2_{pdf} respectivamente. Estos coeficientes de determinación se calculan según las ecuaciones (12) y (13).

$$R^2_{cdf} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^T \{\theta CDF_k - F_\theta(\theta_k)\}^2}{\sum_{k=1}^T \{\theta CDF_k - \overline{\theta CDF}\}^2} \quad (12)$$

$$R^2_{pdf} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^T \{\theta PDF_k - f_\theta(\theta_k)\}^2}{\sum_{k=1}^T \{\theta PDF_k - \overline{\theta PDF}\}^2} \quad (13)$$

Donde $\overline{\theta CDF}$ y $\overline{\theta PDF}$ son los valores medios de todos los θCDF_k y θPDF_k , respectivamente.

En la Figura 1 se compara la distribución de densidad de los datos (θPDF) con la distribución de densidad ($f_\theta(\theta)$) obtenida al resolver el problema P.1, es decir, cuando se ajusta la función acumulada de probabilidad. En la Figura 2 se compara la distribución acumulada de los datos (θCDF) con la distribución acumulada ($F_\theta(\theta_k)$) obtenida al resolver también el problema P.1. De manera similar, en las Figuras 3 y 4 se comparan la distribución de densidad y la distribución de probabilidad obtenidas a partir de los datos con la distribución de densidad y la distribución de probabilidad obtenidas utilizando los parámetros encontrados, en este caso, al resolver el problema P.2, es decir, cuando se ajusta la función de densidad. Ambos ajustes P.1 y P.2 se han obtenido con $N = 6$ y $T = 36$.

Observando las Figuras 1, 2, 3 y 4, resulta evidente que cuando se ajustan los parámetros de la mezcla de distribuciones de von Mises a partir de la distribución de

probabilidad acumulada de los datos (P.1), Figura 1 y 2, se obtienen unos resultados generales peores que los obtenidos al obtener los parámetros de la distribución a partir de la distribución de densidad de los datos (P.2), Figura 3 y 4. Esto se evidencia en el hecho de que existe una diferencia notable entre ambos métodos en el valor del R^2_{pdf} , (P.1 $R^2_{pdf} = 0.9525$, P.2 $R^2_{pdf} = 0.9997$), mientras que para R^2_{cdf} , apenas hay diferencia (P.1 $R^2_{cdf} = 0.9985$, P.2 $R^2_{cdf} = 1.0000$).

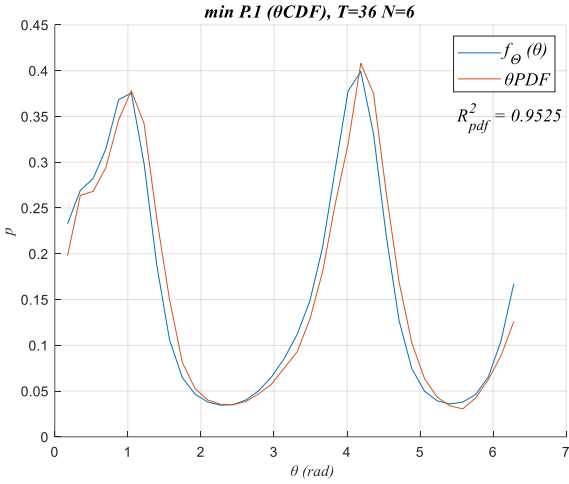


Figura 1: Obtención de $f_{\theta}(\theta)$ a partir de la distribución acumulada. $T = 36$.

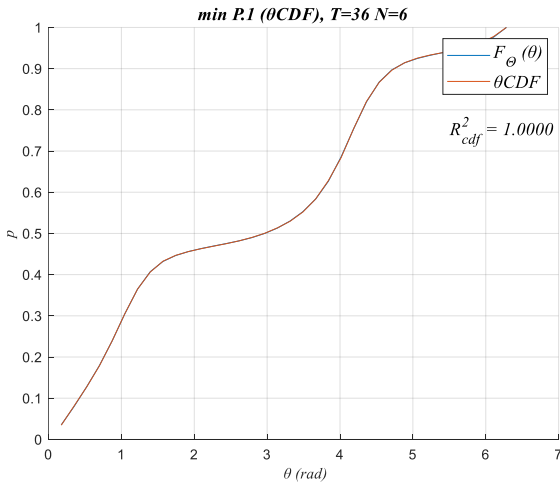


Figura 2: Obtención de $F_{\theta}(\theta)$ a partir de la distribución acumulada. $T = 36$.

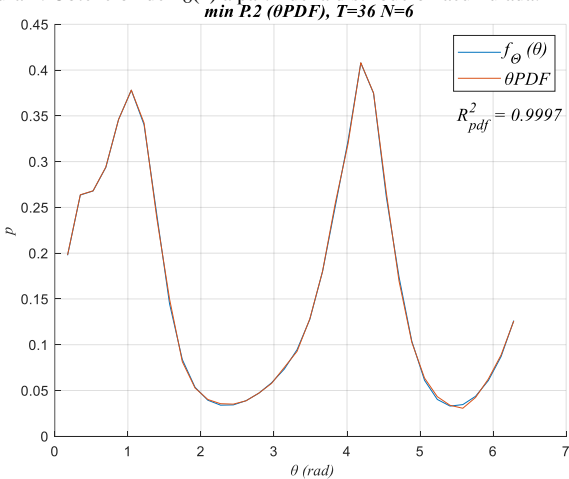


Figura 3: Obtención de $f_{\theta}(\theta)$ a partir de la distribución de densidad. $T = 36$.

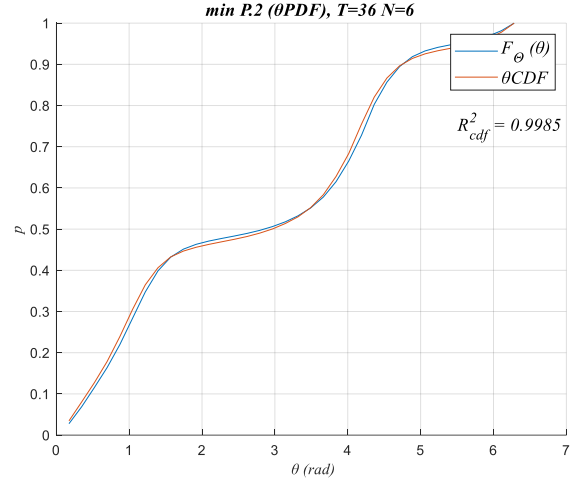


Figura 4: Obtención de $F_{\theta}(\theta)$ a partir de la distribución de densidad. $T = 36$.

En la Tabla 1 se muestra el resultado de los valores obtenidos para los coeficientes de determinación R^2_{cdf} y R^2_{pdf} , para los distintos ajustes realizados con $T = 36$.

Tabla 1: Grado de ajuste. Coeficiente R^2 . $T = 36$.

$T = 36$	R^2_{pdf}		R^2_{cdf}	
	P.1 (θCDF)	P.2 (θPDF)	P.1 (θCDF)	P.2 (θPDF)
$N = 2$	0.9069	0.9575	0.9996	0.9974
$N = 3$	0.9069	0.9776	0.9996	0.9981
$N = 4$	0.9385	0.9854	0.9999	0.9979
$N = 5$	0.9386	0.9975	0.9999	0.9985
$N = 6$	0.9525	0.9997	1.0000	0.9985

Tal y como se puede comprobar en la Tabla 1, independientemente de utilizar P.1 o P.2 para ajustar los parámetros de la mezcla finita de distribuciones de von Mises, el ajuste mejora progresivamente con el aumento de N , tal y como ya se había demostrado en (Carta et al., 2008). En cuanto a R^2_{cdf} , no hay diferencias relevantes entre utilizar P.1 o P.2, aunque se obtienen resultados ligeramente mejores (aproximadamente 0.002) al utilizar la distribución de probabilidad para obtener los parámetros (P.1) en lugar de utilizar la distribución de densidad (P.2), lo cual era esperado. En el caso de R^2_{pdf} , el mejor ajuste se obtiene utilizando la distribución de densidad (P.2). Sin embargo, sorprende la diferencia considerable entre los valores de R^2_{pdf} al obtener los parámetros a partir de la distribución de densidad (P.2) o a partir de la distribución acumulada (P.1), manteniéndose siempre en un rango de entre 0.05 y 0.07. En resumen, mientras que para R^2_{cdf} ambos métodos producen resultados similares, para R^2_{pdf} el método propuesto en este estudio (P.2) supera claramente al método habitual (P.1).

En las Figuras 5, 6, 7, y 8 se muestra gráficamente, a modo de ejemplo, el resultado del ajuste obtenido con $T = 360$, $N = 6$ y la resolución de P.1 y P.2. En las Figuras 5 y 6 se comparan la distribución de densidad y la distribución de probabilidad obtenidas a partir de los datos (θPDF , θCDF) con la distribución de densidad y la distribución de probabilidad obtenidas utilizando los parámetros encontrados utilizando P.1 respectivamente. En las Figuras 7 y 8 se realiza la misma comparativa, pero utilizando los parámetros obtenidos utilizando P.2.

Se puede comprobar como al haber aumentado el número de intervalos en los que se ha dividido la muestra de datos (T), las diferencias entre utilizar la distribución de probabilidad (P.1) y la distribución de densidad (P.2), se han vuelto insignificantes tanto para R^2_{pdf} , Figura 5 y 7, como para R^2_{cdf} , Figura 6 y 8

En la Tabla 2 se muestra el resultado de los valores obtenidos para los coeficientes de determinación R^2_{cdf} y R^2_{pdf} , para los distintos ajustes realizados con $T = 360$. Al igual que con el número de intervalos $T = 36$, el aumento del número de componentes (N) de la mezcla finita de distribuciones de von Mises provoca un mejor ajuste, pero al aumentar el número de intervalos de 36 a 360, las diferencias de los R^2_{pdf} y R^2_{cdf} de ambos métodos se han reducido drásticamente.

Tabla 2: Grado de ajuste. Coeficiente R^2 . $T = 360$.

$T = 360$	R^2_{pdf}		R^2_{cdf}	
	P.1 (θCDF)	P.2 (θPDF)	P.1 (θCDF)	P.2 (θPDF)
$N = 2$	0.9454	0.9519	0.9996	0.9992
$N = 3$	0.9709	0.9726	0.9997	0.9998
$N = 4$	0.9809	0.9838	0.9999	0.9996
$N = 5$	0.9929	0.9938	1.0000	1.0000
$N = 6$	0.9927	0.9939	1.0000	1.0000

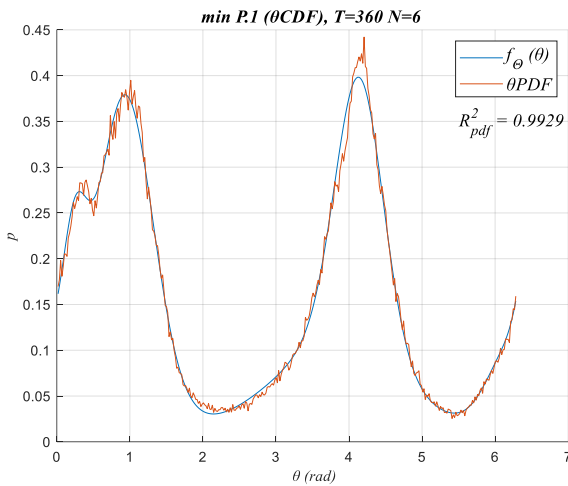


Figura 5: Obtención de $f_{\theta}(\theta)$ a partir de la distribución acumulada. $T = 360$.

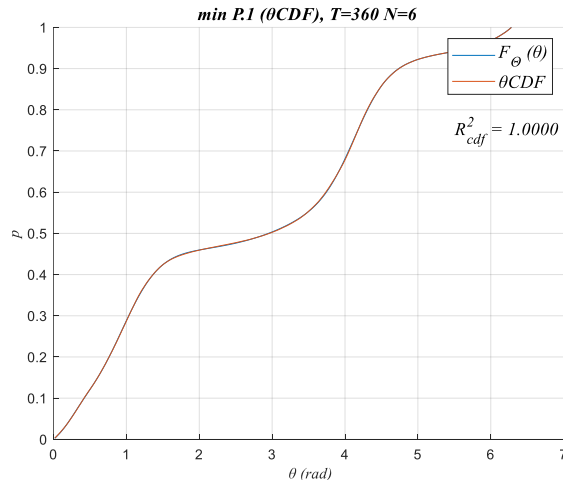


Figura 6: Obtención de $F_{\theta}(\theta)$ a partir de la distribución acumulada. $T = 360$.

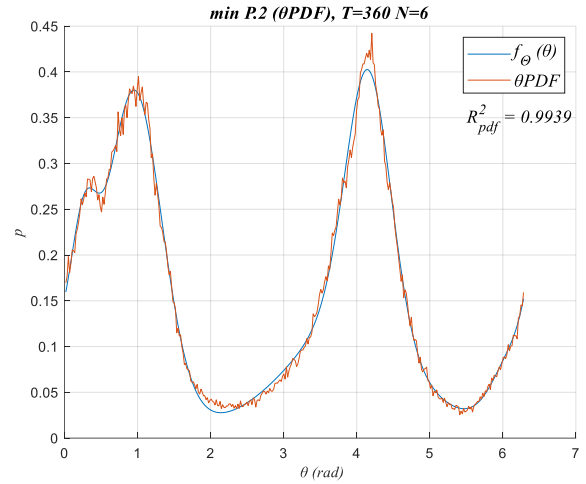


Figura 7: Obtención de $f_{\theta}(\theta)$ a partir de la distribución de densidad. $T = 360$.

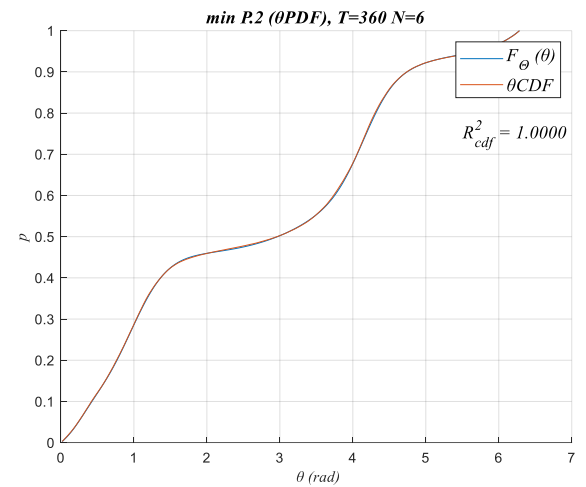


Figura 8: Obtención de $F_{\theta}(\theta)$ a partir de la distribución de densidad. $T = 36$.

4.2. Tiempo de resolución

En este apartado se estudia el efecto que tiene el número de elementos utilizados en la mezcla de distribuciones de von Mises (N) y el número de intervalos en los que se dividen los datos (T) en el tiempo de obtención de los parámetros de las distribuciones, en función de si se utiliza la distribución de probabilidad (P.1) o la distribución de densidad (P.2)

En la Tabla 3, se muestran los tiempos empleados para encontrar el valor de los parámetros de las distintas distribuciones planteadas en el subapartado 4.1.

Tabla 3: Tiempo de cálculo para la obtención de parámetros.

N	Tiempo (s) $T = 36$		Tiempo (s) $T = 360$	
	P.1 (θCDF)	P.2 (θPDF)	P.1 (θCDF)	P.2 (θPDF)
2	0.4373	0.5875	8.7883	0.6364
3	2.3977	0.5994	52.074	0.9041
4	3.0979	0.6354	179.1024	1.4091
5	3.0452	0.5736	812.873	3.2127
6	3.1694	0.5304	791.7207	4.9048

Tal y como puede verse en la Tabla 3, en todos los casos, excepto uno, el tiempo empleado para obtener los parámetros de las distribuciones es menor si se utiliza la formulación del

método de los mínimos cuadrados basada en la distribución de densidad (P.2) en vez de la formulación del método de los mínimos cuadrados basada en la distribución de probabilidad (P.1). Puede observarse como P.2 escala mucho mejor que P.1, aumentando de manera exponencial la diferencia entre ambos métodos a medida que aumenta el número de intervalos en los que se han dividido los datos (T). También, por lo general, el tiempo de cálculo aumenta al incrementarse el número de componentes de la mezcla (N). Estos comportamientos se ven bien reflejados en la Figura 9.

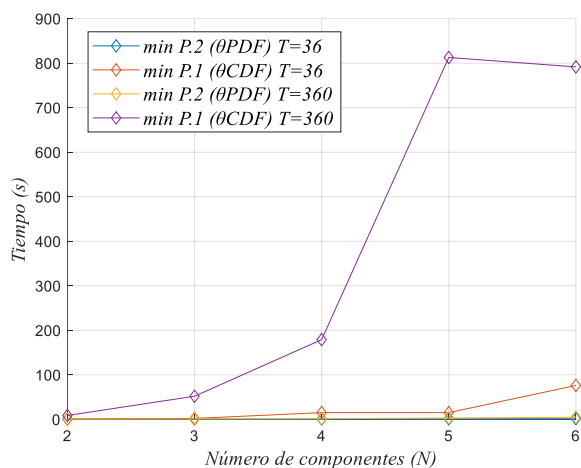


Figura 9: Tiempo de obtención de parámetros. P.1 vs P.2.

5. Conclusiones

La dirección del viento es una variable importante a estudiar a la hora de analizar una ubicación para un futuro parque eólico. En la literatura científica se ha propuesto modelar la distribución de la dirección del viento como una mezcla finita de distribuciones de von Mises. Es habitual que para la obtención de los parámetros de esta mezcla de distribuciones de von Mises se utilice el método de los mínimos cuadrados aplicado sobre la distribución de probabilidad. Sin embargo, en este artículo se demuestra que la obtención de los parámetros usando el método de los mínimos cuadrados sobre la distribución de densidad es mucho más ventajosa. Los beneficios de utilizar la distribución de densidad (P.2) radican en que independientemente del número de intervalos en el que se dividan los datos experimentales, (T) los parámetros encontrados ofrecen siempre ajustes similares o mejores que los parámetros encontrados con la distribución de probabilidad (P.1). Además, la obtención de los parámetros mediante el uso de los mínimos cuadrados aplicados sobre la distribución de densidad (P.2) es, por lo general, siempre más rápida que mediante el uso de los mínimos cuadrados aplicados sobre la distribución de probabilidad (P.1), aumentando mucho las diferencias a medida que el modelo ajustado es más complejo.

Agradecimientos

La publicación es parte del proyecto “Gestión Óptima en Tiempo Real del ciclo Power-to-H2-to-Power (OptiMaPH2P)”, TED2021-131220B-I00, financiado por MCIN/AEI y por la Unión Europea “NextGenerationEU” y del proyecto “Gestión óptima en tiempo real y bajo incertidumbre para gemelos digitales (OptiDit)”, PID2021-123654OB-C33, financiado por MCIN y por la Unión Europea “FEDER”.

Referencias

- Carta, J. A., Bueno, C., & Ramírez, P. (2008). Statistical modelling of directional wind speeds using mixtures of von Mises distributions: Case study. *Energy Conversion and Management*, 49(5), 897–907. <https://doi.org/10.1016/J.ENCONMAN.2007.10.017>
- Carta, J. A., Ramírez, P., & Velázquez, S. (2009). A review of wind speed probability distributions used in wind energy analysis: Case studies in the Canary Islands. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 13(5), 933–955. <https://doi.org/10.1016/J.RSER.2008.05.005>
- Dörenkämper, M., Olsen, B. T., Witha, B., Hahmann, A. N., Davis, N. N., Barcons, J., Ezber, Y., García-Bustamante, E., Fidel González-Rouco, J., Navarro, J., Sastre-Marugán, M., Sile, T., Trei, W., Žagar, M., Badger, J., Gottschall, J., Rodrigo, J. S., & Mann, J. (2020). The Making of the New European Wind Atlas - Part 2: Production and evaluation. *Geoscientific Model Development*, 13(10), 5079–5102. <https://doi.org/10.5194/GMD-13-5079-2020>
- Drew, D. R., Barlow, J. F., Cockerill, T. T., & Vahdati, M. M. (2015). The importance of accurate wind resource assessment for evaluating the economic viability of small wind turbines. *Renewable Energy*, 77, 493–500. <https://doi.org/10.1016/J.RENENE.2014.12.032>
- Erdem, E., & Shi, J. (2011). Comparison of bivariate distribution construction approaches for analysing wind speed and direction data. *Wind Energy*, 14(1), 27–41. <https://doi.org/10.1002/WE.400>
- Hahmann, A. N., Sile, T., Witha, B., Davis, N. N., Dörenkämper, M., Ezber, Y., García-Bustamante, E., Fidel González-Rouco, J., Navarro, J., Olsen, B. T., & Söderberg, S. (2020). The making of the New European Wind Atlas - Part 1: Model sensitivity. *Geoscientific Model Development*, 13(10), 5053–5078. <https://doi.org/10.5194/GMD-13-5053-2020>
- Koepl, G. W. (1982). *Putnam's power from the wind*. Van Nostrand Reinhold Company, New York, NY.
- Masseran, N., Razali, A. M., Ibrahim, K., & Latif, M. T. (2013). Fitting a mixture of von Mises distributions in order to model data on wind direction in Peninsular Malaysia. *Energy Conversion and Management*, 72, 94–102. <https://doi.org/10.1016/J.ENCONMAN.2012.11.025>
- New European Wind Atlas. (2019). https://map.neweuropeanwindatlas.eu/SUMARIO_DEL_BOLETÍN_33/2008/BOCYL. (2008). <https://bocyl.jcyl.es/boletin.do?fechaBoletin=18/02/2008>
- The MathWorks Inc. (2024a). *MATLAB version: 24.1 (R2024a)*. The MathWorks Inc. <https://www.mathworks.com>
- The MathWorks Inc. (2024b). *Optimization Toolbox version: 24.1 (R2024a)*. The MathWorks Inc. <https://www.mathworks.com>
- Wang, H., Xiao, T., Gou, H., Pu, Q., & Bao, Y. (2023). Joint distribution of wind speed and direction over complex terrains based on nonparametric copula models. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 241, 105509. <https://doi.org/10.1016/J.JWEIA.2023.105509>
- Wang, J., Hu, J., & Ma, K. (2016). Wind speed probability distribution estimation and wind energy assessment. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 60, 881–899. <https://doi.org/10.1016/J.RSER.2016.01.057>
- Yang, Z., Lin, Y., & Dong, S. (2022). Joint Model of Wind Speed and Corresponding Direction Based on Wind Rose for Wind Energy Exploitation. *Journal of Ocean University of China*, 21(4), 876–892. <https://doi.org/10.1007/S11802-022-4860-2/METRICS>